Challenge

Réponse aux questions sur le jeu.

Exercice 1 (Résolution au tableau)

Calculer la charge et la flèche maximale pour un arbre en acier St 60 en rotation uniforme reposant sur deux appuis avec une charge concentrée en son milieu. Cet arbre a les caractéristiques suivantes :

diamètre : 20 mm
longueur : 500 mm
$R_{adm} = R_e = 340 \text{ N/mm}^2$

Solution

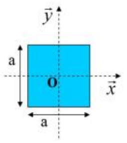
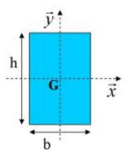
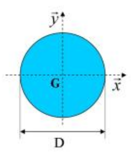
Rappel moment quadratique d'une poutre est défini par :

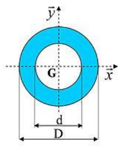
Selon l'axe X
$$I_x = \int\int_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Selon l'axe Y
$$I_y = \int\int_S x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Selon l'axe Z (polaire)
$$I_o = \int\int_S r^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_x + I_y$$

Ainsi les moments quadratiques changent en fonction de la géométrie de la poutre.

Section	I_x	I_y	I_z
Carré 	$I_x = \frac{a^4}{12}$	$I_y = \frac{a^4}{12}$	$I_o = \frac{a^4}{6}$
Rectangulaire 	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_y = \frac{b^3h}{12}$	$I_0 = \frac{bh}{12}(b^2+h^2)$
Circulaire 	$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$	$I_y = \frac{\pi D^4}{64}$	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$

Annulaire 	$I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$I_o = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

Par le théorème de transport de Huygens, le moment quadratique d'une section S dont le barycentre passe par axe parallèle à l'axe de référence et distant d'une valeur d alors

$$I' = I + Sd^2$$

Ainsi pour une poutre de section en I (DESSIN) dont e est l'épaisseur de la partie verticale, h la hauteur total, e' l'épaisseur de la partie horizontale et l' la largeur de la partie horizontale nous pouvons calculer le moment quadratique :

$$I_{Ix} = I_{1x} + 2 * I_{2x} = \frac{e(h - 2e')^3}{12} + 2 * (\frac{l'e'^3}{12} + (l'e') * (\frac{h}{2} - \frac{e'}{2})^2)$$

$$I_{Iy} = I_{1y} + 2 * I_{2y} = \frac{e^3(h - 2e')}{12} + 2 * (\frac{l'^3e'}{12} + (l'e') * (0)^2)$$

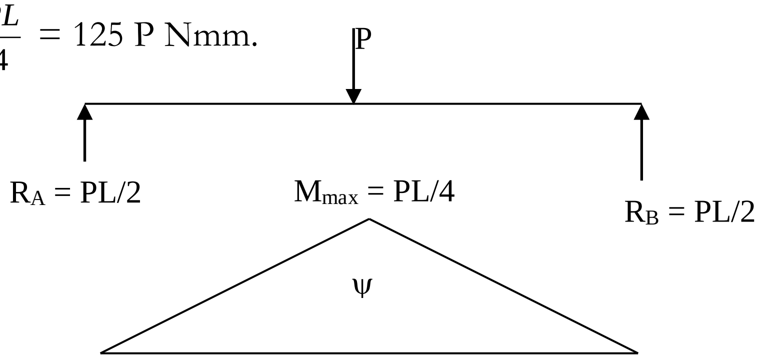
σ_{max} = ?

En flexion, $\sigma = \frac{M.y}{I}$.

Elle sera maximale lorsque M et y le seront ; I étant constant.

$y_{max} = \frac{d}{2} = 10$ mm ; $I = \frac{\pi.d^4}{64}$

$M_{max} = \frac{PL}{4} = 125$ P Nmm.



$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}.y_{max}}{I} = \frac{PL}{4} * \frac{d}{2} * \frac{64}{\pi d^4} = \frac{8PL}{\pi d^3}$$

La contrainte maximale ne pouvant pas dépasser la limite admissible, nous avons :

$\sigma_{max} \leq R_{adm}$

$\Leftrightarrow \frac{8.P.L}{\pi.d^3} \leq 340$

$$P \leq \frac{340 * \pi d^3}{8L} = 2136.3N$$

La flèche maximale pour un arbre sur deux appuis simples d'extrémités est donnée par:

$$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{2136.3 * 500^3}{48 * 217500 * \frac{\pi 20^4}{64}} = 3.257mm$$

Exercice 2

Soit un arbre de transmission sur deux appuis d'extrémité ayant en son centre une roue dentée, source d'effort tangentiel et radial. La vitesse de rotation de cet arbre est de 1500 tr/min. Il doit transmettre une puissance de 7 kW. Ses caractéristiques géométriques sont les suivantes :

diamètre de l'arbre : 20 mm
longueur : 200 mm
diamètre de la roue dentée : 200 mm

Solution

Il s'agit ici d'une sollicitation composée d'une flexion et d'une torsion. Dès lors, C'est la contrainte de comparaison $\square_c$ qui sera limitée à la valeur admissible R_{adm}

a) $R_{adm}= R_e$ 340

b) σ_c = ?

En utilisant le critère de Von Mises :

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_{adm}$$

$$\sigma = \frac{M_f \frac{d}{2}}{I_x} \qquad \tau = \frac{M_t \frac{d}{2}}{I_O}$$

$$M_{fmax} = \frac{F_r L}{4} \qquad M_{tmax} = \frac{F_t d_{roue}}{2}$$

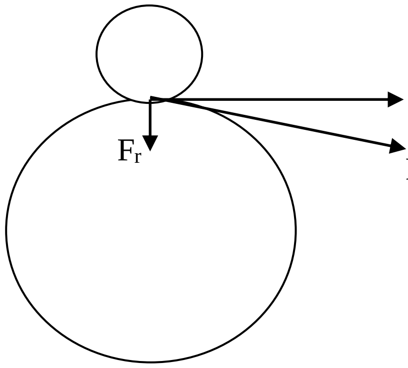
Le moment idéal selon Von Mises pour éviter la déformation plastique est lié aux moment de flexion et de torsion par :

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2}$$

Dans notre cas le moment de torsion équivaut au couple à transmettre :

$$M_t = \frac{P * 60}{2\pi N} = \frac{7000 * 60}{2\pi * 1500} = 44.56Nm$$

Quant aux efforts F_r et F_t, ils sont déterminés en se basant sur le schéma simplifié de l'engrènement des deux roues dentées ci après :



$\Rightarrow\ F_t = \dfrac{44.586}{\frac{0.2}{2}} = 445.86$ N

L'angle entre F_t et F vaut $\alpha_0 = 20°$.
Donc $F_r = F_t.tg(\alpha) = 162.27$ N
Par conséquent :
$M_{tmax} = \dfrac{F_t d_{roue}}{2} = 8100 Nmm$
et $M_t = F_t.\dfrac{d_{roue}}{2} = 44586$ Nmm
D'où :
$\sigma = \dfrac{M_f \frac{d}{2}}{I_x} = \dfrac{32 * 8100}{\pi 20^3} = 10.31 \dfrac{N}{mm^2}$
et
$\tau = \dfrac{16.M_t}{\pi.d_{arbre}^3} = \dfrac{16 * 44586}{\pi * 20^3} = 28.39$ N/mm²

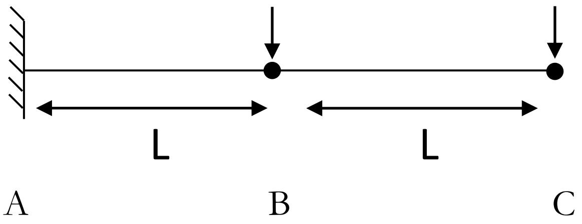
En introduisant ces valeurs dans la formule d'avant-projet, nous trouvons :

$$\sigma_c = \sqrt{10.31^2 + 3 * 28.39^2} = 50.24 \frac{N}{mm^2}$$

La condition $\sigma_c \leq R_{adm}$ nous donne la valeur de la limite élastique du matériau à choisir.

Exercice 3

Trouver la déflexion au point B de la poutre Cantilever de la figure ci-dessous en utilisant le deuxième théorème de Castigliano. La poutre est prismatique et a comme raideur de flexion EI.



Solution

Renommons les forces appliquées aux points B et C par F_B et F_C. Nous avons donc le moment M.

$$0 \leq x \leq L$$

$$M(x) = -F_B L * (1 - \frac{x}{L}) - 2F_C L * (1 - \frac{x}{2L})$$

$$L \leq x \leq 2L$$

$$M(x) = -2F_C L * (1 - \frac{x}{2L})$$

L'énergie de déformation devient donc :

$$E_c = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \mathrm{d}x + \int_L^{2L} \frac{M^2}{2EI} \mathrm{d}x$$

$$f_B = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}F_B} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}F_B} \mathrm{d}x + \int_L^{2L} \frac{M}{EI} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}F_B} \mathrm{d}x$$

La dérivée du moment vaut:

$$0 \leq x \leq L$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}F_B} = -L * (1 - \frac{x}{L})$$

$$L \leq x \leq 2L$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}F_B} = 0$$

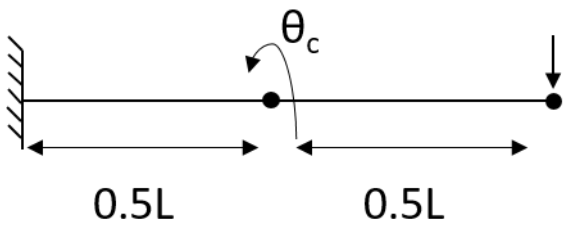
L'équation du déplacement deviant donc:

$$f_B = \frac{1}{EI} \int_0^L [-F_B L(1 - \frac{x}{L}) - 2F_C L(1 - \frac{x}{2L})][-L(1 - \frac{x}{L})]\mathrm{d}x$$

$$f_B = \frac{1}{3} \frac{F_B L^3}{EI} + \frac{5}{6} \frac{F_C L^3}{EI} = \frac{7}{6} \frac{F L^3}{EI}$$

Exercice 4

Trouver la rotation au point C causé par une force au point C en utilisant le deuxième théorème de Castigliano. La poutre est prismatique et a comme raideur de flexion EI.



A C B

Solution :

On applique un couple T au point C dans la direction de la rotation voulue de telle façon que :

$$\theta_c = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}T}$$

Le moment M vaut:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M(x) = T - F(L-x)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$M(x) = -F(L-x)$$

Et ainsi la rotation équivaut à

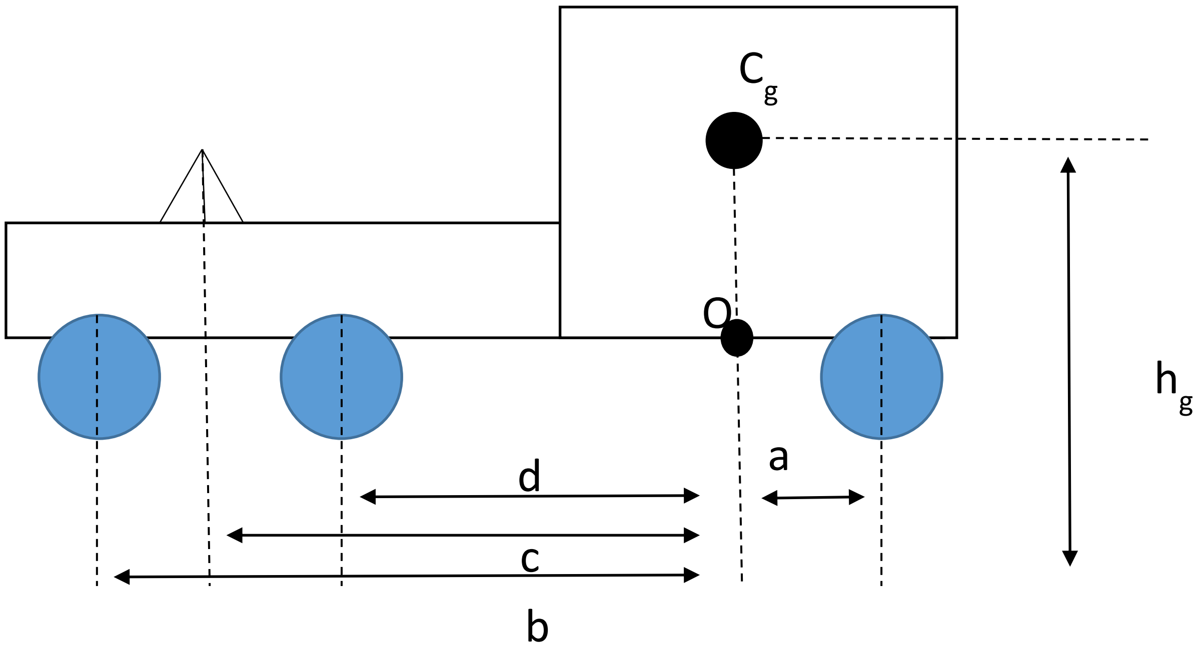
$$\theta_C = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}T} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{T - F(L-x)}{EI} * 1\mathrm{d}x = -\frac{3}{8}\frac{FL^2}{EI} + \frac{1}{2}\frac{TL}{EI}$$

En définissant T=0 on obtient la réponse finale

$$\theta_C = -\frac{3}{8}\frac{FL^2}{EI}$$

<u>Exercice 5 : cas hyperstatique pour un camion</u>

Soit un camion à trois essieux articulés calculer les forces d'appuis au niveau des pneumatiques en considérant la figure ci-dessous.



Nous savons que la masse du véhicule induit une force vertical F_{mg} ainsi que le point d'attache de la remorque subit une force vertical F_{zt}. Lorsque nous sommes à l'arrêt et sur une route plane, calculer les réactions d'appuis en connaissant les données suivantes :

M= 7150 kg	F_{zt} = 94 210 N	a = 1.175 m	b= 2.31 m
c = 1.86 m	d = 1.60 m	h_g = 1.1 m	

<u>Solution :</u>
Nous savons déjà que l'équilibre horizontal est annulé vu que nous sommes à l'arrêt.
Si nous faisons l'équilibre des forces vertical et des moments autour du point O nous obtenons les équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{3} F_{zi} - F_{zt} - mg = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_{zi} * (x_i) + F_{zt} * (c) + mgh_g \sin(0) = 0$$

Nous avons 2 équations pour 3 inconnues. Notre système est donc hyperstatique. Nous allons utiliser le théorème de Castigliano afin de résoudre le système.

Faisons l'hypothèse que F_{z2} est connu nous pouvons écrire les deux équations comme :

$$F_{z1} + F_{z2} + F_{z3} - F_{zt} - mg = 0$$

$$F_{z1}a - F_{z2}d - F_{z3}b + F_{zt}c = 0$$

Nous isolons F_{z1} et F_{z3}

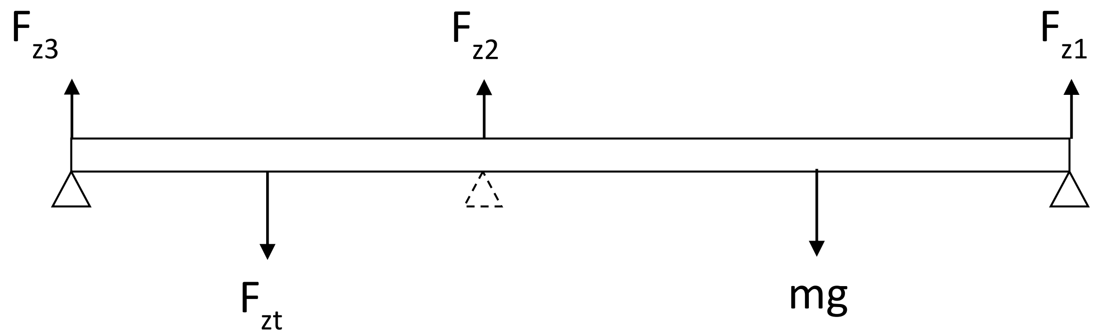
$$F_{z1} = F_{zt} + mg - F_{z2} - F_{z3}$$

$$F_{z3} = \frac{(-a-d)F_{z2} + (a+c)F_{zt} + amg}{b*(1-\frac{a}{b})} = \frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}$$

Le moment de flexion peut s'exprimer comme :

$$M(x) = F_{z3}(x) - F_{zt}[x-(b-c)]^+ + F_{z2}[x-(b-d)]^+ - mg[x-b]^+$$

Le Schéma rendu libre du système devient le suivant si on suppose F_{z2} connu



Par le théorème de Castigliano, la dérivée de l'énergie de déformation à la réaction recherchée (F_{z2}) est nulle. Nous avons donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}F_{Z2}} = \int_0^L \frac{\mathrm{d}M_f(x)}{\mathrm{d}F_{Z2}} M_f(x)\mathrm{d}x = 0$$

En remplaçant les valeurs connues dans $M_f(x)$ nous avons :

$$M(x) = \frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}x - 94210[x-0.45]^+ + F_{z2}[x-0.71]^+ - 7150*9.81[x-2.31]^+$$

La dérivée du moment par rapport à F_{z2} vaut :

$$\frac{\mathrm{d}M_f(x)}{\mathrm{d}F_{Z2}} = \frac{-2.775}{3.485}x + [x - 0.71^+]$$

La dérivée de l'énergie de deformation devient:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}F_{Z2}} &= \int_0^{0.45} \frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}x * \frac{-2.775}{3.485}x\mathrm{d}x \\
&+ \int_{0.45}^{0.71} [\frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}x - 94210(x-0.45)] * [\frac{-2.775}{3.485}x]\mathrm{d}x \\
&+ \int_{0.71}^{2.31} [\frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}x - 94210(x-0.45) + F_{z2}(x-0.71)] * [\frac{-2.775}{3.485}x + (x-0.71)]\mathrm{d}x \\
&+ \int_{2.31}^{3.485} [\frac{368343.61 - 2.775F_{z2}}{3.485}x - 94210(x-0.45) + F_{z2}(x-0.71) - 7150 * 9.81(x-2.31)] * [\frac{-2.775}{3.485}x + (x-0.71)]
\end{aligned}
$$

En développant cette équation nous obtenons la valeur pour F_{z2} et ainsi déterminer F_{z1} et F_{z3}.

$$
\begin{aligned}
F_{z2} &= 140479[N] \\
F_{z1} &= 29999[N] \\
F_{z3} &= -6165[N]
\end{aligned}
$$